石 油 学 报
1983年10月 ACTA PETROLEI SINICA 第4卷 第4期

交叉球形容器中的应力和加强构件的计算

张 振 华
（抚顺石油学院）

提 要

交叉球形容器在国外石油化学工业中已经应用。本文介绍了内压球形容器中薄膜应力及变形，内压薄膜球形壳体弯曲应力和薄膜应力公式；并按有力矩理论导出了交叉球形压力容器交叉处应力的计算公式；介绍了按薄膜应力计算交叉球形容器加强构件的计算方法和计算公式，提出了按有力矩理论计算交叉球形容器加强构件的计算方法与计算公式。

前 言

球形容器是比较理想的压力容器，在内压力作用下应力值最小，储存时能容最大的容积且表面积最小，从成本上看它具有最小的厚度和最小的表面积，因此所用材料的重量和成本较低。根据生产需要可做成简单球形容器和复合的交叉球形容器。在此介绍一下交叉球形容器中的应力计算和交叉联结处加强构件的计算。

一、内压薄壁球形容器中的薄膜应力和变形

设一球形容器(图1)承受内压力p公斤/厘米^2，平均半径为r厘米，壁厚为h厘米，材料的弹性模量为E，泊桑比为μ，则根据材料力学公式可知容器壁上的经向应力σ_1和周向应力σ_2为

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{pr}{2h}\text{公斤/厘米}^2 \qquad (1)$$

球形容器受压后在半径方向产生的径向位移为Δr按下式计算[1]：

$$\Delta r=\frac{pr^2}{2hE}(1-\mu) \qquad (2)$$

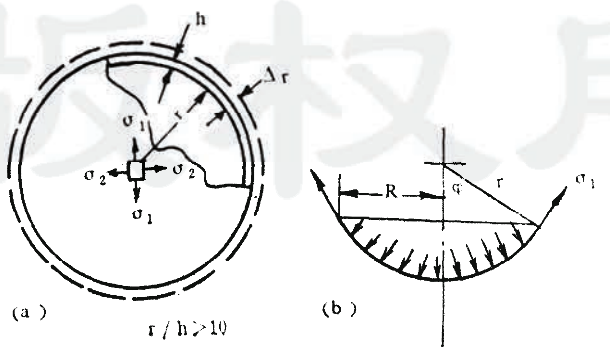

图 1 内压薄壁球形容器薄膜应力分析

图 1 (b)所示为从球形容器中截出的一段壳体，壳体上一点的法线到转轴交点的距离为 r，与转轴组成的角为 φ，则在半径R方向的位移为

$$\Delta R=\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi}{2Eh} \tag{3}$$

经向转动的角位移（以弧度表示）$\psi=0$ （4）

二、内压薄膜球形壳体弯曲应力和簿膜应力公式[2]

现在研究如图2所示的部分球形壳体

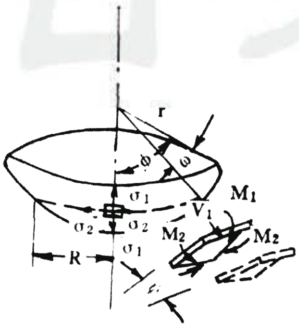

图 2 内压薄膜球形壳体弯曲应力分析

$$\left.\begin{aligned}
&\beta=\left[3(1-\mu^2)\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}\\
&K_1=1-\frac{1-2\mu}{2\beta}\operatorname{ctg}(\varphi-\omega)\\
&K_2=1-\frac{1+2\mu}{2\beta}\operatorname{ctg}(\varphi-\omega)\\
&K_3=\frac{e^{-\beta\omega}}{\sqrt{\sin(\varphi-\omega)}}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$r/h>10$

经向径向剪力$V_1=-CK_3\sin(\beta\omega+\xi)$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{经向弯矩} && M_1=\frac{CrK_3}{2\beta}[K_1\cos(\beta\omega+\xi)+\sin(\beta\omega+\xi)]\\
&\text{周向弯矩} && M_2=\frac{CrK_3}{2\beta}\left\{\mu\sin(\beta\omega+\xi)+\left[2-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)(K_1+K_2)\right]\cos(\beta\omega+\xi)\right\}\\
&\text{经向斜率的改变} && \psi=\frac{C2\beta^2K_3}{Eh}\cos(\beta\omega+\xi)\\
&\text{周向半径的改变} && \Delta R=\frac{Cr\beta K_3\sin(\varphi-\omega)}{Eh}[\cos(\beta\omega+\xi)-K_2\sin(\beta\omega+\xi)]\\
&\text{经向薄膜应力} && \sigma_1=\frac{-CK_3\operatorname{ctg}(\varphi-\omega)}{h}\sin(\beta\omega+\xi)\\
&\text{经向弯曲应力} && \sigma_1'=\frac{-6M_1}{h^2}\\
&\text{周向薄膜应力} && \sigma_2=\frac{C\beta K_3}{2h}[2\cos(\beta\omega+\xi)-(K_1+K_2)\sin(\beta\omega+\xi)]\\
&\text{周向弯曲应力} && \sigma_2'=\frac{-6M_2}{h^2}\\
&\text{经向径向剪应力} && \tau=\frac{V_1}{h}\ \text{（平均值）}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

以上公式适用范围 $3/\beta<\varphi<\left(\pi-\frac{3}{\beta}\right)$

石油学报 版权所有

式中：Q_0——单位线长度上的载荷（公斤/厘米）；

P——单位面积上的压力（公斤/厘米^2）；

M_0——所施加的单位线长度上的力矩（公斤·厘米/厘米）；

V_1——经向径向剪力（公斤/厘米）；

M_1和M_2——经向和周向弯矩，当压向外面时为正（公斤·厘米/厘米）；

ψ——径向斜率的改变，与V_1同向的改变为正（弧度）；

ΔR——周向半径的改变（厘米）；

σ_1 和σ_2——径向和周向薄膜应力，拉应力时为正（公斤/厘米^2）；

σ_1'和σ_2'——经向和周向弯曲应力，外边受拉时为正（公斤/厘米^2）；

E——弹性模量（公斤/厘米^2）；

μ——泊桑比；

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

情况1，在边缘上作用有均布径向力Q_0（图 3）。

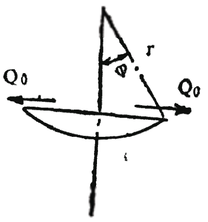

图 3　边缘均布经向力

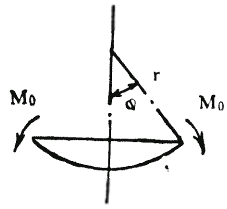

图 4　边缘均布力矩

$$\left.\begin{aligned}
&C=\frac{Q_0(\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+K_1{}^2}}{K_1}\\
&\xi=Arctg(-K_1)\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<\xi<\frac{\pi}{2}\right)\\
&M_1\text{ 最大值发生在 }\omega=\frac{\pi}{4\beta}\text{处，在边角处}\omega=0\\
&V_1=Q_0\sin\varphi,\ M_1=0,\sigma_1{}'=0,\ \sigma_1=\frac{Q_0\cos\varphi}{h},\\
&\sigma_2=\frac{Q_0\beta\sin\varphi}{2h}\left(\frac{2}{K_1}+K_1+K_2\right)=\sigma_{2\max}\ ,\\
&M_2=\frac{Q_0h^2\beta^2\cos\varphi}{6K_1r},\qquad\sigma_2{}'=\frac{-Q_0\beta^2\cos\varphi}{K_1r}\\
&\psi=\frac{Q_02\beta^2\sin\varphi}{EhK_1},\qquad\Delta R=\frac{Q_0r\beta\sin^2\varphi}{EhK_1}(1+K_1K_2)
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

情况2，边缘承受均布力矩M_0，如图 4 所示，则

$$\left.\begin{aligned}
&C=\frac{M_0 2\beta\sin\varphi}{rK_1},\quad \xi=0,\\
&\text{在边角上},\quad \omega=0,\\
&V_1=0,\quad \sigma_1=0,\quad M_1=M_0,\quad \sigma_1'=\frac{-6M_0}{h^2},\\
&\sigma_2=\frac{-6M_2}{h^2},\quad \psi=\frac{M_0 4\beta^3}{EhrK_1},\quad \Delta R=\frac{M_0 2\beta^2\sin\varphi}{EhK_1}
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

三、交叉球形压力容器的应力计算

交叉球形薄壁容器如图5所示，它是由两个部分球形壳体焊接在一起，承受内压力p，每个球壳的平均半径为r，壁厚为h，现在研究在接合处的应力。在接合处的边缘载荷可以认为由三部分组成(如图5.b所示)，切向边缘力T用以平衡压力，内压力引起薄膜应力并伴随有周向半径ΔR的变化，Q_0是消除T的分力，M_0是保证边缘不转动所需。

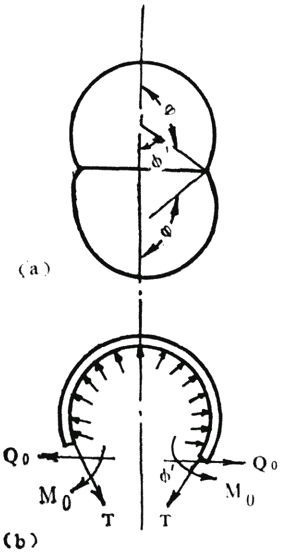

图5　交叉球形压力容器接合处应力分析

已知球壳的弹性模量为E,泊桑比为μ

$$\left.\begin{aligned}
&\text{由公式（1）得：}\quad \sigma_1=\sigma_2=\frac{pr}{2h}\\
&\text{由（3）式得}\quad \Delta R=\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi}{2Eh}
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$T=\sigma_1 h$

由（4）式　　$\psi=0$

由（5）式知：　　$\beta=\left[3(1-\mu^2)\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$

由图5.b可知

$$Q_0=T\cos\varphi'=\frac{pr}{2}\cos\varphi'\tag{10}$$

在边缘上，$\omega=0$

由(5)式

$$K_1=1-\frac{1-2\mu}{2\beta}\text{ctg}\varphi$$

$$K_2=1-\frac{1+2\mu}{2\beta}\text{ctg}\varphi$$

利用情况1的(7)式，得：

$$\Delta R=\frac{Q_0 r\beta\sin^2\varphi}{EhK_1}(1+K_1K_2)$$

$$\psi=\frac{Q_0 2\beta^2\sin\varphi}{EhK_1}$$

石油学报 版权所有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{Q_0\cos\varphi}{h}\\ \sigma_1'&=0\\ \sigma_2&=\frac{Q_0\beta\sin\varphi}{2h}\left(\frac{2}{K_1}+K_1+K_2\right)\\ \sigma_2'&=\frac{-Q_0\beta^2\cos\varphi}{K_1r}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

利用情况 2 的公式（8），得：

$$\left.\begin{aligned}\Delta R&=\frac{M_0 2\beta^2\sin\varphi}{EhK_1}\\ \psi&=\frac{M_0 4\beta^3}{EhrK_1}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

因为组合边缘的转角ψ必须为零。则由（9）、（11）、（12）式知，三个ψ角相 加必须为零，即

$$0+\frac{Q_0 2\beta^2\sin\varphi}{EhK_1}+\frac{M_0 4\beta^3}{EhrK_1}=0$$

由此得

$$M_0=-\frac{Q_0 r\sin\varphi}{2\beta}\tag{13}$$

由（9）、（11）、（12）式可知，总的周向半径的改变为

$$\begin{aligned}\Delta R&=\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi}{2Eh}+\frac{Q_0 r\beta\sin^2\varphi}{EhK_1}(1+K_1K_2)+\frac{M_0 2\beta^2\sin\varphi}{EhK_1}\\ &=\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi}{2Eh}+\frac{Q_0 r\beta\sin^2\varphi}{EhK_1}(1+K_1K_2)-\frac{Q_0 r\beta\sin^2\varphi}{EhK_1}\end{aligned}\tag{14}$$

由情况 2 的公式（8）知

$$\sigma_1=0\tag{15}$$

$$\sigma_1'=\frac{-6M_0}{h^2}=-\frac{6}{h^2}\left(-\frac{Q_0 r\sin\varphi}{2\beta}\right)=\frac{3Q_0 r\sin\varphi}{h^2\beta}\tag{16}$$

$$\sigma_2=\frac{M_0 2\beta^2}{rK_1h}=\left(-\frac{Q_0 r\sin\varphi}{2\beta}\right)\frac{2\beta^2}{rK_1h}=-\frac{Q_0\beta\sin\varphi}{K_1h}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}M_2&=\frac{M_0}{2\beta K_1}[(1+\mu^2)(K_1+K_2)-2K_2]\\ &=\left(-\frac{Q_0 r\sin\varphi}{2\beta}\right)\frac{1}{2\beta K_1}[(1+\mu^2)(K_1+K_2)-2K_2]\\ &=-\frac{Q_0 r\sin\varphi}{4\beta^2K_1}[(1+\mu^2)(K_1+K_2)-2K_2]\end{aligned}\tag{18}$$

$$\sigma_2'=-\frac{6M_2}{h^2}=\frac{3Q_0 r\sin\varphi}{2h^2\beta^2K_1}[(1+\mu^2)(K_1+K_2)-2K_2]\tag{19}$$

石油学报 版权所有

在联接处的迭加应力为

$$\sigma_1=\frac{pr}{2h}+\frac{Q_0\cos\varphi}{h}+0=\frac{pr+2Q_0\cos\varphi}{2h} \tag{20}$$

$$\sigma_2=\frac{pr}{2h}+\frac{Q_0\beta\sin\varphi}{2h}\left(\frac{2}{K_1}+K_1+K_2\right)-\frac{Q_0\beta\sin\varphi}{K_1h} \tag{21}$$

$$\sigma_1'=0+0+\frac{3Q_0r\sin\varphi}{h^2\beta}=\frac{3Q_0r\sin\varphi}{h^2\beta} \tag{22}$$

$$\sigma_2'=0+\left(-\frac{Q_0\beta^2\cos\varphi}{K_1r}\right)+\frac{3Q_0r\sin\varphi}{2h^2\beta^2K_1}[(1+\mu^2)(K_1+K_2)-2K_2]$$

$$=-\frac{Q_0\beta^2\cos\varphi}{K_1r}+\frac{3Q_0r\sin\varphi}{2h^2\beta^2K_1}[(1+\mu^2)(K_1+K_2)-2K_2] \tag{23}$$

在联接处总的经向应力为

$$\sigma_{1总}=\sigma_1+\sigma_1'=\frac{pr+2Q_0\cos\varphi}{2h}+\frac{3Q_0r\sin\varphi}{h^2\beta} \tag{24}$$

在联接处总的周向应力为

$$\sigma_{2总}=\sigma_2+\sigma_2'=\frac{pr}{2h}+\frac{Q_0\beta\sin\varphi}{2h}\left(\frac{2}{K_1}+K_1+K_2\right)-\frac{Q_0\beta\sin\varphi}{K_1h}-\frac{Q_0\beta^2\cos\varphi}{K_1r}$$

$$+\frac{3Q_0r\sin\varphi}{2h^2\beta^2K_1}[(1+\mu^2)(K_1+K_2)-2K_2] \tag{25}$$

四、交叉球形压力容器加强构件的计算

交叉球形压力容器中基本的薄膜应力可由（1）式求出。按照薄膜理论两个直径相等的交叉球形容器交叉处加强构件中的力如图6所示。球壁上单位长度上的拉出力为 $pr/2$。对于每个球壳在交叉点向外的径向分力为 $pr\cos\varphi'/2$，或者其总值为 $pr\cos\varphi'$。一个球中的应力为 $pr/2h$。相应的单位伸长为 $pr(1-\mu)/2Eh$，为了消除壳体的弯曲，增强隔板(图6a)的扩张量必须和交叉处壳体的扩张量相等。为了简化设计计算可按照无力矩理论来设计隔板，在单位长度交叉圆上径向拉出力取 $pr\cos\varphi'$，它的增大量将等于球形容器在交叉圆处自然半径的增长，在交叉圆处半径增长（半径为 $r\sin\varphi'$），按（3）式为

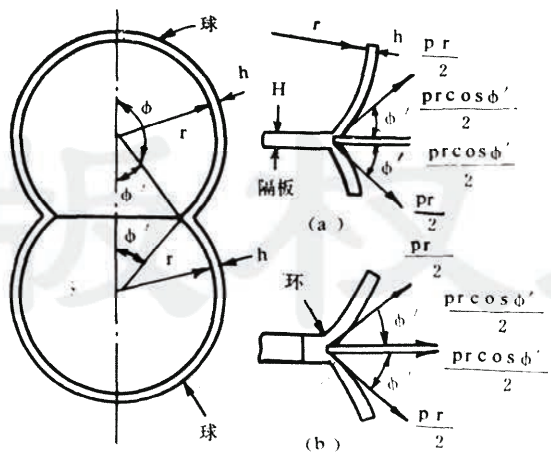

图 6

$$\Delta R=\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi}{2Eh}=\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi'}{2Eh} \tag{26}$$

厚度为H的固体连续隔板，不计在隔板上的压力时的半径增大值为（由承受均布径向外压力的圆盘的半径的改变的公式求出）：

$$\Delta R' = \frac{pr\cos\varphi'(1-\mu)r\sin\varphi'}{EH} \quad [2] \tag{27}$$

令（26）式中的ΔR和（27）式中的$\Delta R'$相等，得到隔板的厚度为

$$H = 2h\cos\varphi' \tag{28}$$

如果加强圈用图6b的形式，加强圈截面积用A表示，加强圈在单位长度载荷 $q = pr\cdot\cos\varphi'$作用下，在加强圈上的周向应力为

$$\sigma_2 = \frac{qr\sin\varphi'}{A} = \frac{pr^2\cos\varphi'\sin\varphi'}{A} \tag{29}$$

计算加强圈的径向增大值可利用

$$\Delta R = r\left(\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}\right)$$

式，忽略式中的第二项，并且加强圈半径用$r\sin\varphi'$，并将（29）式代入则得

$$\Delta R'' = \frac{pr^3\cos\varphi'\sin^2\varphi'}{AE} \tag{30}$$

令（30）式中的$\Delta R''$与（26)式中的ΔR相等，则得

$$A = \frac{2hr\cos\varphi'\sin\varphi'}{1-\mu} \tag{31}$$

为了更精确地计算交叉处加强构件的尺寸，可按照有力矩理论（弯曲理论）进行计算，则需考虑p、Q_0和M_0作用在交叉圆处引起的径向位移。

对于如图6a所示的增强隔板，为了消除壳体的弯曲可令ΔR与$\Delta R'$相等，并由(10）式将$Q_0 = \frac{1}{2}pr\cos\varphi'$ 代入，又因 $\sin\varphi' = \sin\varphi$，得

$$\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi}{2Eh} + \frac{pr\cos\varphi'\cdot r\beta\sin^2\varphi}{2EhK_1}(1+K_1K_2) - \frac{pr\cos\varphi'\cdot r\beta\sin^2\varphi}{2EhK_1}$$
$$= \frac{pr^2\cos\varphi'\sin\varphi(1-\mu)}{EH}$$

化简后得到加强隔板的厚度为

$$H = \frac{2h(1-\mu)\cos\varphi'}{1-\mu+\beta K_2\sin\varphi\cos\varphi'}. \tag{32}$$

对于如图6b所示的加强圈，为了消除壳体的弯曲可令ΔR与$\Delta R''$相等，并将

$Q_0 = \frac{1}{2}pr\cos\varphi'$ 代入，又因$\sin\varphi' = \sin\varphi$，得

$$\frac{pr^2(1-\mu)\sin\varphi}{2Eh} + \frac{pr\cos\varphi'\cdot r\beta\sin^2\varphi}{2EhK_1}(1+K_1K_2) - \frac{pr\cos\varphi'\cdot r\beta\sin\varphi}{2EhK_1}$$
$$= \frac{pr^3\cos\varphi'\sin^2\varphi}{AE}$$

化简后，得加强圈的面积为

$$A=\frac{2hr\cos\varphi'\sin\varphi}{1-\mu+\beta K_2\cos\varphi'\sin\varphi}. \tag{33}$$

按照有力矩理论进行计算，考虑的因素较全，比较接近于实际情况。

（本文收到日期1982年11月20日）

参 考 文 献

〔1〕John F. Harvey: Theory and Design of Modern Pressure Vessels, Second Edition 1974.

〔2〕Raymond J. Roark, Warren C. Young: Formulas for Stress and Strain, Fifth Edition 1975.

〔3〕Wilhelm Flugge: Stresses in Shells, Second Edition 1973.

〔4〕S. S. Gill: "The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components", 1970.

〔5〕А. Д. Домашнев: Конструирование и расчет Химических Аппаратов, МАШГИЗ 1961.

〔6〕С. Д. Пономарев: Расчеты На прочность В Машиностроении, ТОМ II. МАШГИЗ 1958.

CALCULATION OF STRESS AND REINFORCEMENT MEMBERS FOR INTERSECTING SPHERICAL VESSELS

Zhang Zhenhua

(Fushun Petroleum College)

Abstract

Stress and deformation of membrane in internally pressurized thin-wall spherical vessels is discussed, together with the formula for calculation of bending stress and stress of membrane of spherical shells. Formulae for calculation of stress at the intersection and calculation of reinforcement members of intersecting pressurized spherical vessels of equal size are also presented.

石油学报 版权所有